**Tema 1.5 EVENTOS INDEPENDIENTES**

**Motivación del tema.** La igualdad significa que aunque haya sucedido el evento , este no afecto a la probabilidad del evento A, esto implica que el evento A es independiente del evento B. Ahora bien si escribimos la ecuación como:

entonces la independencia de los eventos A y B también se puede escribir como:

**Definición 1.** Se dice que los eventos y son independientes si la ocurrencia del evento es independiente de la ocurrencia del evento del evento , o en otras palabras, o en forma equivalente

**Ejemplo 1.** Una moneda equilibrada se lanza 3 veces produciendo el espacio muestral equiprobable:

Consideremos los eventos:

Encuentre los pares de eventos independientes.

**Solución.** Primero calculamos las probabilidades:

,

También

Ahora podemos concluir que

son independientes

son independientes

no son independientes

**Ejemplo 2.** Un detector de mentiras muestra una lectura positiva (es decir, indica una mentira) en 10% de los casos cuando la persona dice la verdad y en 95% de los casos cuando la persona miente. Suponga que se sospecha de dos personas de haber cometido un delito, que fue hecho por una sola persona, y de hecho sólo una de ellas es la culpable, (a) ¿cuál es la probabilidad de que el detector muestre una lectura positiva para los dos sospechosos? , (b) ¿cuál es la probabilidad de que el detector de una lectura positiva para cualquiera de los dos o para ambos sospechosos?

**Solución.** Sean los eventos independientes

A es “el detector da una lectura positiva para el inocente”

B es “el detector da una lectura positiva para el culpable”

1. Buscamos
2. Buscamos

**Ejemplo 3.** Sean A y B eventos. Suponga que P(A)=0.4, mientras que . Sea P(B)=p, (a) ¿para qué valores de p son A y B ajenos?, (b) ¿para qué valores de p son A y B independientes?

**Solución.** (a) Para que A y B sean ajenos necesitamos que se cumpla

1. Para que A y B sean independientes se debe cumplir

(1)

Calculamos con la siguiente fórmula

Despejando obtenemos

(2)

Entonces combinando las ecuaciones (1) y (2) debemos resolver la ecuación

Así

**Definición2. Independencia de tres o más eventos.** Tres eventos A, B, C son independientes si cumplen las dos condiciones siguientes:

1. Cada par de eventos son independiente, es decir,

,

**Ejemplo 4.** Se lanza un par de monedas equilibradas resultando en el espacio equiprobable Consideremos los eventos:

Demuestre que tales eventos no son independientes.

**Solución.** Primero calculamos las probabilidades: También

.

Por lo tanto los eventos son independientes dos a dos, pero como

Por lo tanto, la condición (2) no se satisface, entonces los tres eventos no son independientes.

**Ejemplo 5.** Considérese la siguiente parte de un circuito eléctrico, con tres elevadores. La corriente fluirá del punto a al b, si hay por lo menos un camino cerrado, después de activar los elevadores. Estos dispositivos pueden fallar y no cerrar al ser activados. Supóngase que los elevadores funcionan independientemente uno de otro y que cierran normalmente, al ser activados, con una probabilidad de 0.9. (a) ¿cuál es la probabilidad de que la corriente fluya después de activar los elevadores?, (b) ¿cuál es la probabilidad de que funcione el elevador C, dado que fluye la corriente, después de activar los elevadores?

A

a B b

C

**Solución.** (a) la probabilidad de que fluya la corriente corresponde a

Utilizando la independencia obtenemos

(b) la probabilidad de que funcione el elevador C, dado que fluye la corriente, después de activar los elevadores es:

Como entonces

**Ejercicios.**

1. Dos hombres A y B disparan a un objetivo. Suponga que y representan sus probabilidades de tocar al objetivo. Se supone que A y B son independientes. Encuentre la probabilidad de que (a) A no logre el objetivo, (b) ambos logren el objetivo, (c) uno de ellos logre el objetivo, (d) ninguno logre el objetivo.

Respuesta: (a) 2/3, (b) 1/15, (c) 7/15, (d) 8/15

1. Supón que A y B son eventos independientes, tales que la probabilidad de que no ocurra ninguno de los dos es y la probabilidad de que ocurra B es . Demuestre que

Ayuda: Demuestre que , después

1. Demuestre que si A y B son eventos independientes entonces y son independientes.

Ayuda: Utilice las leyes de De Morgan para desarrollar , mientras que utilice la fórmula del complemento para desarrollar .

1. Tres hombres A,B y C disparan a un objetivo. Suponga que representan sus probabilidades de darle al objetivo (se supone que los eventos son independientes). Encuentre la probabilidad de que (a) todos alcancen el objetivo, (b) que ninguno alcance el objetivo, (c) que al menos uno alcance el objetivo.

Respuesta: (a) 1/72, (b) 5/12, (c) 7/12.

**Definición 3. ENSAYOS REPETIDOS INDEPENDIENTES.** Sea E un experimento aleatorio con espacio muestral . Si repetimos el experimento , el espacio muestral estará formado por las ,

,

donde sus probabilidades se calculan como

**Ejemplo 5.** Supongamos que hay tres caballos en una carrera, sus probabilidades respectivas de ganar son . En otras palabras:

Supongamos que los caballos compiten dos veces, encuentre el espacio muestral y las probabilidades de que cada caballo gane una o dos veces.

**Solución.** El espacio muestral de los dos ensayos repetidos es el siguiente:

Por conveniencia notacional se ha escrito ac para el par ordenado (a, c). La probabilidad de cada punto de es la siguiente:

Así la probabilidad de que c gane la primera carrera y a gane la segunda carrera es .

**Ejercicios.**

1. Cierto equipo de fútbol gana (W) con probabilidad 0.6, pierde (L) con probabilidad 0.3, y empata (T) con probabilidad 0.1. El equipo juega tres veces durante el fin de semana. (a) Determine los elementos del evento A en que el equipo gana al menos dos veces y no pierda; y encuentre P(A). (b) Determine los elementos del evento B en que el equipo gane, pierda y empate en algún orden; y encuentre P(B).

Respuesta: (a) 0.324, (b) 0.108.

1. Cierto tipo de misil alcanza su objetivo con probabilidad 0.3. Encuentre el número mínimo de misiles que deben dispararse, de modo que exista por lo menos un 80% de probabilidad de darle al objetivo.

Respuesta: .

1. La probabilidad de que un hombre alcance un objetivo es 1/3. Dispara al objetivo 6 veces, (a) Describa y encuentre el número de elementos en el espacio muestral S, (b) Sea E el evento en que alcanza el objetivo exactamente dos veces, encuentre los elementos de E, (c) calcule .

Respuesta: 80/243.